Početní část 1 - 1.2.2021

1. (a) Zřejmě $D_f = \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = -f(x)$, takže je lichá. $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ v $\mathbb{R}$, takže je rostoucí a tudíž prostá v $\mathbb{R}$.

   (b) Snadným výpočetem zjistíme, že

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \iff x = \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = g(y)$$

   a $D_g = H_f = (-1, 1)$, protože $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1$.

   (c) Spočteme $g'(y) = \frac{2}{1-y^2}$, dosazením tedy $g'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{8}{3}}$.

   (d) Spočteme $g(\frac{1}{2}) = \log 3$, a dosadíme do vzorce

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))},$$

   tedy

$$g'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(g(\frac{1}{2}))} = \frac{1}{f'(\log 3)} = \frac{(e^{\log 3}+1)^2}{2e^{\log 3}} = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

2. $D_f = [-2, 2]$, tamtéž je spojitá, $f(\pm 2) = \pm 2, f(0) = \pi$. Díky Darbouxově vlastnosti má funkce f kořen v intervalu $(-2, 0)$.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \arccos \frac{x}{2},$$

stacionární bod je 0, f roste v $[-2, 0]$.

Funkce klesá v $[0, 2]$, glob. minimum je $[-2, -2]$, glob. maximum $[0, \pi]$.

Obor hodnot je tedy $[-2, \pi]$

V krajních bodech $f'_+(-2) = +\infty$, to je snadné; $f'_-(2) = -1$, to je těžší, musí se použít l'Hospital.

Dále

$$f''(x) = \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} g(x),$$

kde

$$g(x) = -4 \arccos \frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2}$$

a nyní stačí ukázat, že $g(x)$ má jednotné znaménko. Zderivujeme ji, vyjde $g'(x) = 2\sqrt{4-x^2} > 0$ v $(-2, 2)$, a protože $g(2) = 0$, je g záporná v $(-2, 2)$, proto je záporná i f'' a funkce je konkávní v celém D_f.

Inflexní body nejsou.

Asymptoty nepřipadají v úvahu.